

Activité 3 : « Reconnaissance d'un extremum à l'aide d'un tableau de variation – lien avec la fonction dérivée »

On appelle extremum d'une fonction f un maximum ou un minimum de cette fonction sur un intervalle donné.

Vous allez apprendre à reconnaître, sur des exemples, les conditions pour qu'une fonction possède un extremum dans un intervalle donné. On s'intéressera uniquement aux extrema qui sont à l'intérieur de l'intervalle (pas aux extrémités de l'intervalle).

Pour cela, réaliser les différentes activités ci-dessous.

❶ Premier exemple :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 1]$ par : $f(x) = x^2 + 4x + 1$

On donne ci-dessous la courbe représentative de f et son tableau de variation :

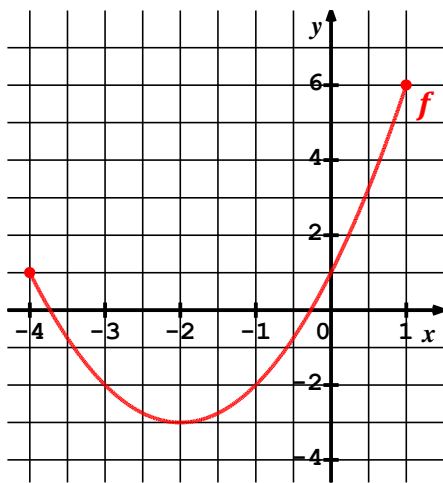


Tableau de variation de la fonction f :

Valeurs de x	- 4	- 2	1
Variations de f	1	-3	6

a. Variations de la fonction f (à compléter) :

On observe, sur le tableau de variation, que le sens de variation de la fonction f **change en** $x_0 = \dots$

b. On montre que f admet un extremum que l'on détermine (entourer les bonnes réponses et compléter):

On s'intéresse à ce qui se passe en x_0 :

Avant $x_0 = \dots$, la fonction f est et après $x_0 = \dots$ elle est

J'en déduis que sur l'intervalle $[-4 ; 1]$, la fonction f admet un **minimum / maximum** en $x_0 = \dots$ et ce **minimum / maximum** vaut $f(x_0) = \dots$

c. Lien avec la dérivée de la fonction f (à compléter) :

- Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction $f(x) = x^2 + 4x + 1$ (voir formulaire des dérivées usuelles à la fin du document) :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

- Calculer $f'(x_0) = \dots\dots\dots$

Aide : ① Combien vaut x_0 ?
② Dans l'expression de la fonction dérivée f' , que doit-on remplacer par cette valeur ?

(A compléter)

Je constate que sur l'intervalle $[-4 ; 1]$, en $x = x_0$:

la fonction f de sens de variation :
elle estavant $x = x_0$ etaprès $x = x_0$.

Je constate également que $f'(x_0) = \dots\dots$

J'en déduis que la fonction f admet
un extremum en $x = x_0$.
Il s'agit d'un

② Deuxième exemple :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-4 ; 2]$ par : $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

On donne ci-dessous la courbe représentative de g et son tableau de variation :

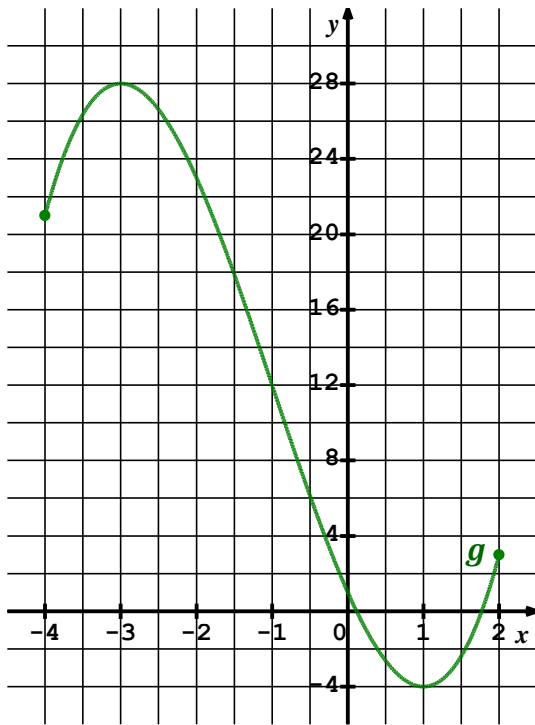


Tableau de variation de la fonction g :

Valeurs de x	-4	-3	1	2
Variations de g	21	28	-4	3

a. Variations de la fonction g (à compléter) :

On observe, sur le tableau de variation, que le sens de variation de la fonction g change en $x_1 = \dots$ et $x_2 = \dots$

b. En déduire les valeurs des extrema de la fonction g (à compléter) :

On observe ce qui se passe autour de x_1 :

Avant x_1 , la fonction g est et après x_1 elle est

On observe ce qui se passe autour de x_2 :

Avant x_2 , la fonction g est et après x_2 elle est

J'en déduis que sur l'intervalle $[-4 ; 2]$, la fonction g admet :

- un en $x_1 = \dots$ et ce vaut $g(x_1) = \dots$
- un en $x_2 = \dots$ et ce vaut $g(x_2) = \dots$

c. Lien avec la dérivée de la fonction g (à compléter) :

- Déterminer l'expression de la fonction dérivée de g (voir formulaire) : $g'(x) = \dots$
- Calculer $g'(x_1) = \dots$ et $g'(x_2) = \dots$

(A compléter)

Je constate qu'à l'intérieur de l'intervalle $[-4 ; 2]$, en $x = x_1$ et en $x = x_2$:

la fonction g de sens de variation.

La fonction g admet un extremum en $x = x_1$ et en $x = x_2$.
Il s'agit respectivement d'un et d'un

Je constate également que $g'(x_1) = \dots$ et $g'(x_2) = \dots$

(A compléter)

Première conclusion :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $[a ; b]$.

Si la fonction f admet un extremum en $x = x_0$, alors $f'(x_0) = \dots$

On admet que lorsqu'on recherche un extremum d'une fonction dérivable, il faut rechercher la (ou les) valeur(s) de x qui annule(nt) sa dérivée.

③ Troisième exemple :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ par : $h(x) = x^3$

a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de h (voir formulaire) :

$$h'(x) = \dots\dots\dots$$

b. Vérifier que la dérivée s'annule pour $x_0 = 0$

$$\text{Calculer } h'(0) = \dots\dots\dots$$

c. Hypothèse

D'après ce résultat et vos constatations précédentes, peut-on affirmer que la fonction h admet un extremum en $x_0 = 0$?

d. Vérification graphique et tableau de variation

On donne ci-dessous la courbe représentative de h et son tableau de variation :

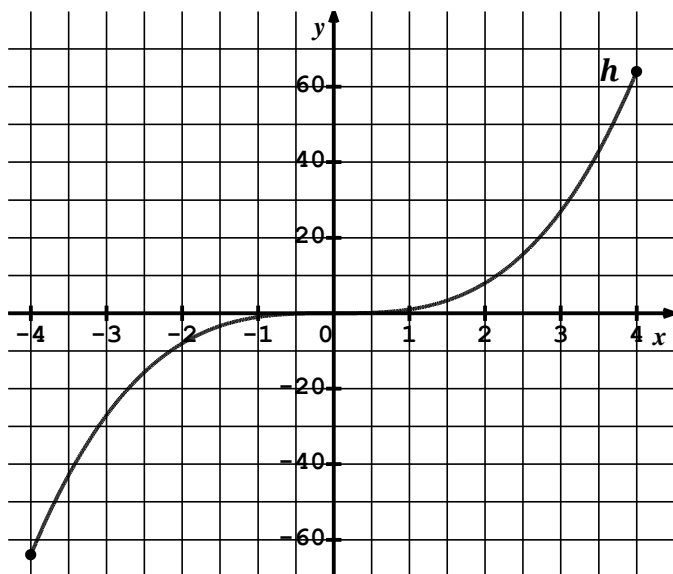


Tableau de variation de la fonction h :

Valeurs de x	- 4	4
Variations de h	-64	64

Variations de la fonction h (entourer la bonne réponse) :

On observe sur le tableau de variation que le sens de variation *change / ne change pas*.

(A compléter)

Je constate qu'à l'intérieur de l'intervalle $[-4 ; 4]$, pour $x_0 = 0$:

- la dérivée $h'(x_0) = \dots\dots$

MAIS

- la fonction h
de sens de variation

La fonction h n'admet pas d'.....
(maximum ou minimum) en x_0 .

Deuxième conclusion :

(A compléter)

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $[a ; b]$.

Le fait que $f'(x_0) = \dots\dots\dots$ ne suffit pas pour affirmer que la fonction f admet un extremum en $x = x_0$.

Quand on recherche un extremum, il faut donc rechercher la (ou les) valeur(s) de x qui annule(nt) la dérivée et établir le tableau de variation pour conclure.

**« Reconnaissance d'un extremum à l'aide d'un tableau de variation –
lien avec la fonction dérivée »**

Fiche synthèse

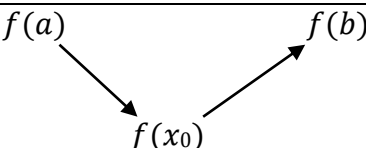
À compléter :

Chercher un extremum, c'est trouver un ou un..... d'une fonction sur un intervalle donné $[a ; b]$.

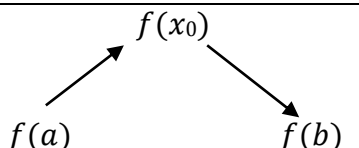
Lors de la recherche d'extrema qui sont à l'intérieur de l'intervalle (pas aux extrémités de l'intervalle), je cherche s'il existe une (ou des) valeur(s) de x qui la dérivée et j'établis le tableau de variation de la fonction.

① Premier cas : la dérivée s'annule en $x = x_0$ et la fonction change de sens de variation en x_0 .

Lorsque le tableau de variation de f présente un changement de variation, autrement dit s'il se présente sous l'une des formes suivantes :

Valeurs de x	a	x_0	b
$f'(x)$	0		
Variations de f			

La fonction admet un en x_0 ,
égal à $f(x_0)$

Valeurs de x	a	x_0	b
$f'(x)$	0		
Variations de f			

La fonction admet un en x_0 ,
égal à $f(x_0)$

On remarque que la fonction f admet un extremum en x_0 (un ou un).

② Deuxième cas : la dérivée s'annule en $x = x_0$ mais la fonction ne change pas de sens de variation en x_0 .

On remarque que la fonction f d'extremum en $x = x_0$.

Formulaire des dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$a u(x)$	$a u'(x)$